

A decorative border surrounds the page, composed of various colorful icons of school supplies such as pencils, pens, erasers, rulers, compasses, globes, calculators, and books.

**BRODEȚCHI
FELICIA**

**DORCA
DORIANA**

**OȚOIU
ILEANA**

**BRODEȚCHI
MIRCEA**

**NEGREA
STELA**

**MODELE DE TESTE
PENTRU CONCURSURILE DE MATEMATICĂ
ALE PROFESORILOR**

**BRODEȚCHI
FELICIA**

**BRODEȚCHI
MIRCEA**

**DORCA
DORIANA**

**NEGREA
STELA**

**OȚOIU
ILEANA**

**MODELE DE TESTE PENTRU CONCURSURILE DE MATEMATICĂ ALE
PROFESORILOR**

SIBIU

2024

ISBN 978-973-0-40726-6

**EXAMENUL NAȚIONAL PENTRU DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL
PREUNIVERSITAR
MATEMATICĂ**

Model 1

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

-
- 1.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - (m+2)x + 4, m \in \mathbb{R}$.
- 7p** a) Determinați numerele reale m știind că $(f \circ f)(2) = 4$.
- 8p** b) Determinați valorile reale ale lui m știind că graficul funcției intersectează axa Ox într-un punct situat în intervalul $(1, 2)$.
- 2.** Se consideră triunghiul ABC isoscel cu $AB=AC$ și $\hat{A} = 20^\circ$. Fie punctele D și E pe laturile AC , respectiv AB , astfel încât $\sphericalangle ACE = 30^\circ$ și $\sphericalangle AED = 50^\circ$.
- 7p** a) Arătați că $\triangle BEC$ este isoscel.
- 8p** b) Determinați măsura unghiului BDC .
- 3.** Se consideră $a \in \mathbb{Z}_5, a \neq \hat{0}$ și polinomul $f = X^5 - X + a$.
- 7p** a) Demonstrați că pentru orice $b \in \mathbb{Z}_5^*$ are loc relația $b^4 = \hat{1}$.
- 8p** b) Demonstrați că polinomul f nu are rădăcini în \mathbb{Z}_5 , pentru orice $a \in \mathbb{Z}_5, a \neq \hat{0}$.
- 4.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - \sqrt{e^{2x} + 1}$.
- 7p** a) Determinați imaginea funcției f .
- 8p** b) Calculați $\int_0^1 e^x f(x) dx$.

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VI-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

<p>Clasa a VI-a</p> <p>1.1. Identificarea unor noțiuni specifice mulțimilor și relației de divizibilitate în \mathbb{N}</p> <ul style="list-style-type: none"> - Recunoașterea unor mulțimi finite sau infinite (mulțimea numerelor naturale, mulțimea numerelor naturale pare/impare, mulțimea cifrelor unui număr, mulțimea divizorilor/multiplilor unui număr natural) - Definirea unor mulțimi folosind diagrame și/sau enumerare de elemente - Recunoașterea unor numere prime - Identificarea, dintr-o mulțime de numere, a unui număr compus - Identificarea unui divizor al unui număr dat - Scrierea unui număr natural de două cifre ca produs de puteri de numere prime, prin observare directă - Scrierea mulțimii divizorilor unui număr natural folosind descompunerea în produs de numere prime - Recunoașterea unor perechi de numere prime între ele <p>2.1. Evidențierea în exemple a relațiilor de apartenență, de incluziune, de egalitate și a criteriilor de divizibilitate cu 2, 5, 10^n, 3 și 9 în \mathbb{N}</p> <ul style="list-style-type: none"> - Recunoașterea și exemplificarea de elemente care aparțin/nu aparțin unei mulțimi date prin diagrame sau prin enumerarea elementelor - Recunoașterea și exemplificarea de mulțimi date prin diagrame sau prin enumerarea elementelor; mulțimi care sunt sau nu în relație de incluziune - Identificarea unor numere naturale care se divid cu 2, 5, 10^n, 3 sau 9, utilizând criteriile de divizibilitate - Scrierea unui număr natural ca produs de puteri de numere prime folosind descompunerea în factori primi - Selectarea dintr-o enumerare dată a numerelor naturale prime/compose
<p>3.1. Utilizarea unor modalități adecvate de reprezentare a mulțimilor și de determinare a c.m.m.d.c. și a c.m.m.m.c.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Reprezentarea unor mulțimi prin diagrame și/sau prin enumerarea elementelor - Efectuarea de operații cu mulțimi (reuniunea, intersecția, diferența) punând accentul pe exemple practice - Determinarea c.m.m.d.c./c.m.m.m.c. prin descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime - Verificarea, prin exemple, a proprietății $(a,b) \cdot [a,b] = a \cdot b$, unde a și b sunt numere naturale (de exemplu, calcularea c.m.m.m.c. pentru numere prime între ele) - Utilizarea unor exemple pentru deducerea unor proprietăți ale relației de divizibilitate în mulțimea numerelor naturale <p>4.1. Exprimarea în limbaj matematic a unor situații concrete care se pot descrie utilizând mulțimile și divizibilitatea în \mathbb{N}</p> <ul style="list-style-type: none"> - Exprimarea în limbaj matematic a unor caracteristici ale elementelor unor mulțimi finite (de exemplu, mulțimea cifrelor pare) - Formularea unor enunțuri simple folosind cuvintele „și”, „sau”, „nu” în contextul operațiilor cu mulțimi - Utilizarea terminologiei specifice divizibilității - Redactarea rezolvării unor probleme referitoare la relația de divizibilitate în \mathbb{N} <p>5.1. Analizarea unor situații date în contextul mulțimilor și al divizibilității în \mathbb{N}</p> <ul style="list-style-type: none"> - Asocierea „unu la unu” a elementelor a două mulțimi finite care au același cardinal - Estimarea cardinalului unei mulțimi în contexte practic-aplicative (de exemplu: numărul elevilor școlii, numărul notelor obținute de un elev într-un semestru, numărul orașelor unui județ) - Analizarea și compararea unor metode diferite de rezolvare a unei probleme de divizibilitate - Aplicarea proprietăților divizibilității în \mathbb{N} pentru rezolvarea exercițiilor cu fracții

6.1. Transpunerea, în limbaj matematic, a unor situații date utilizând mulțimi, operații cu mulțimi și divizibilitatea în \mathbb{N}

- *Deducerea unor consecințe imediate care decurg din analizarea unui set de date asociate mulțimilor (de exemplu, în general $A \setminus B$ este diferită de $B \setminus A$)*
- *Interpretarea unor situații practice sau interdisciplinare (de exemplu, numeral cardinal/ordinal) folosind limbajul specific mulțimilor și operațiilor cu mulțimi*
- *Interpretarea unor noțiuni de bază din geometrie (punct, segment, semidreaptă, dreaptă; poziții relative: punct-dreaptă, dreaptă-dreaptă) utilizând limbajul specific mulțimilor*
- *Identificarea în situații practice a unor intersecții, reuniuni sau diferențe de mulțimi (de exemplu: criterii de divizibilitate, numere de două cifre)*
- *Rezolvarea unor probleme practice utilizând proprietățile divizibilității în \mathbb{N}*

[...]

Domeniul de conținut	Conținuturi
Mulțimi. Numere	1. MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE <ul style="list-style-type: none">• Descriere, notații, reprezentări; mulțimi numerice/nenumerică; relația dintre un element și o mulțime; relații între mulțimi• Mulțimi finite, cardinalul unei mulțimi finite; mulțimi infinite, mulțimea numerelor naturale• Operații cu mulțimi: reuniune, intersecție, diferență• Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime; aplicație: determinarea celui mai mare divizor comun (<i>c.m.m.d.c.</i>) și a celui mai mic multiplu comun (<i>c.m.m.m.c.</i>); numere prime între ele• Proprietăți ale divizibilității în \mathbb{N}: $a a$, unde $a \in \mathbb{N}$; $a b$ și $b c \Rightarrow a c$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}$; $a b$ și $a c \Rightarrow a (b \pm c)$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}$; $a bc$ și $(a, b) = 1 \Rightarrow a c$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}$

Notă: Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Pentru o evaluare la finalul unității de învățare „**Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale**”, folosind informațiile din secvența precedentă, elaborați 3 itemi : *un item cu răspuns scurt, un item de tip întrebare structurată și un item de tip rezolvare de probleme.*

În elaborarea itemilor se vor avea în vedere următoarele aspecte:

- menționarea competenței specifice evaluate;
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat
- respectarea formatului fiecărui tip de item elaborat;
- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)
- corectitudinea științifică a informației de specialitate.

EXAMENUL NAȚIONAL DE DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNT
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

1.	a) $(f \circ f)(2) = f(4 - 2m)$ $6m^2 - 16m + 12 = 4 \Leftrightarrow m \in \left\{ \frac{2}{3}, 2 \right\}$	3p
	b) Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow m = 2, m = -6$ graficul funcției intersectează axa Ox în $x=2$, respectiv $x=-2$ care nu aparțin intervalului $(1, 2)$. Pentru $\Delta > 0, f(1) \cdot f(2) < 0 \Rightarrow m \in (2, 3)$, graficul funcției intersectează axa Ox într-un singur punct situat în intervalul $(1, 2)$.	4p
		4p
2.	a) $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = (180^\circ - \sphericalangle A) : 2 = 80^\circ$ $\sphericalangle BCE = 80^\circ - \sphericalangle ACE = 50^\circ$ și $\sphericalangle BEC = 180^\circ - (\sphericalangle EBC + \sphericalangle BCE) = 50^\circ \Rightarrow \triangle BEC$ este isoscel.	3p
	b) Fie $F \in AC$ astfel încât $BF = BC \Rightarrow \sphericalangle BCF = \sphericalangle BFC = 80^\circ$ și $\sphericalangle CBF = 20^\circ \Rightarrow \sphericalangle FBE = 60^\circ$. Cum $BF = BC$ și $BC = BE \Rightarrow BF = BE$. Astfel, obținem $\triangle BEF$ echilateral. $\sphericalangle FED = 180^\circ - (\sphericalangle BEF + \sphericalangle AED) = 70^\circ$ și $\sphericalangle EDF = \sphericalangle AED + \sphericalangle A = 70^\circ \Rightarrow \triangle FDE$ isoscel cu $FE = DF$ și $\sphericalangle EFD = 180^\circ - 2 \cdot 70^\circ = 40^\circ$. Obținem $DF = FE = BF$ și $\sphericalangle BFD = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ \Rightarrow \sphericalangle BDC = 40^\circ$.	4p
		4p
3.	a) $\hat{1}^4 = \hat{1}, 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 4 = \hat{1}$, $\hat{3}^4 = \hat{3} \cdot \hat{3} \cdot \hat{3} \cdot \hat{3} = 4 \cdot 4 = \hat{1}, 4^4 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = \hat{1} \cdot \hat{1} = \hat{1}$,	3p
	b) $f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = f(2) = f(\hat{3}) = f(4) = a$ Cum $a \neq \hat{0}$, polinomul f nu are rădăcini în \mathbb{Z}_5 .	4p
		4p
4.	a) $f'(x) = e^x - \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} + 1}}, x \in \mathbb{R}$	3p
	$f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ funcția f este crescătoare pe \mathbb{R} . $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Cum f este continuă pe \mathbb{R} , imaginea funcției este $(-1, 0)$	4p

	$\int_0^1 e^x f(x) = \int_0^1 e^{2x} dx - \int_0^1 e^x \sqrt{e^{2x} + 1} dx$ <p>b)</p> $= \frac{e^2 - 1}{2} - \int_1^e \sqrt{t^2 + 1} dt =$ $= \frac{e^2 - 1 - e\sqrt{e^2 + 1} + \sqrt{2} - \ln \frac{e + \sqrt{e^2 + 1}}{1 + \sqrt{2}}}{2}$	<p>3p</p> <p>3p</p> <p>2p</p>
--	---	--

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

<p><i>Itemul cu răspuns scurt</i> elaborat :</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>3p</p>
<p><i>Itemul de tip întrebare structurată</i> elaborat :</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>3p</p>
<p><i>Itemul de tip rezolvare de probleme</i> elaborat :</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>3p</p>

**EXAMENUL NAȚIONAL PENTRU DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL
PREUNIVERSITAR
MATEMATICĂ**

Model 2

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = m \cdot 49^x + 4(m - 1) \cdot 7^x + m - 1$, unde $m \in \mathbb{R}^*$. |
| 7p | a) Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $f(x) = 0$ pentru $m = \frac{9}{13}$. |
| 8p | b) Determinați $m \in \mathbb{R}^*$ pentru care $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. |
| | 2. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A și punctul M pe latura AC . Cercul circumscris triunghiului BMC intersectează latura AB în punctul P . |
| 7p | a) Arătați că $\sphericalangle AMB = \sphericalangle ACB + \sphericalangle MPC$. |
| 8p | b) Dacă N este simetricul punctului M față de punctul A , demonstrați că P este ortocentrul triunghiului NBC . |
| | 3. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 și $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. |
| 7p | a) Dacă $a = 4, b = 6$ și f are toate rădăcinile reale, arătați că $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \in \mathbb{Z}$. |
| 8p | b) Calculați $x_1^{18} + x_2^{28} + x_3^{38} + x_4^{48}$ pentru $a = b = c = d = 1$. |
| | 4. Se consideră funcția $f: (-1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)^{x+1} - e^x$. |
| 7p | a) Arătați că $f(x) \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$. |
| 8p | b) Pentru fiecare număr natural n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = 4 - e$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a V-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

Clasa a V-a
1.1. Identificarea numerelor naturale în contexte variate <ul style="list-style-type: none">- Scrierea și citirea numerelor naturale în sistemul de numerație zecimal- Identificarea unor numere naturale într-o diagramă, într-un grafic sau într-un tabel care conțin date referitoare la o situație practică- Identificarea unui număr natural pe baza unor condiții impuse cifrelor sale- Identificarea unei metode aritmetice adecvate pentru rezolvarea unei probleme date

2.1. Efectuarea de calcule cu numere naturale folosind operațiile aritmetice și proprietățile acestora

- Efectuarea operațiilor aritmetice cu numere naturale
- Efectuarea de calcule utilizând factorul comun
- Efectuarea operațiilor cu puteri utilizând regulile de calcul specifice
- Reprezentarea datelor dintr-o problemă, în vederea aplicării unei metode aritmetice adecvate

3.1. Utilizarea regulilor de calcul pentru efectuarea operațiilor cu numere naturale și pentru divizibilitate

- Utilizarea algoritmului împărțirii, cu restul egal sau diferit de zero, în cazul în care deîmpărțitul și împărțitorul au una sau mai multe cifre
- Aproximarea/estimarea rezultatelor obținute prin utilizarea algoritmului împărțirii
- Calcularea unor expresii numerice care conțin paranteze (rotunde, pătrate și acolade), cu respectarea ordinii efectuării operațiilor
- Aplicarea metodelor aritmetice pentru rezolvarea unor probleme cu numere naturale
- Determinarea unui număr natural pe baza unor condiții impuse cifrelor sale (de exemplu, determinați numerele de forma $\overline{a2b5}$, știind că produsul cifrelor sale este 120)

4.1. Exprimarea în limbaj matematic a unor proprietăți referitoare la comparații, aproximări, estimări și ale operațiilor cu numere naturale

- Reprezentarea pe axa numerelor a unui număr natural, utilizând compararea și ordonarea numerelor naturale
- Justificarea estimărilor rezultatelor unor calcule cu numere naturale
- Justificarea scrierii unui număr natural dat sub formă de putere cu baza sau exponentul indicat
- Exprimarea unor numere naturale de două cifre ca produs de numere prime

5.1. Analizarea unor situații date în care intervin numere naturale pentru a estima sau pentru a verifica validitatea unor calcule

- Evidențierea avantajelor folosirii proprietăților operațiilor cu numere naturale în diferite contexte
- Analizarea faptului că un număr este sau nu pătratul unui număr natural (utilizând ultima cifră, încadrarea între pătratele a două numere naturale consecutive)
- Determinarea unor numere naturale care respectă anumite condiții (de exemplu, determinați numerele prime a și b , știind că $3a + 2b = 16$)
- Compararea a două numere naturale scrise sub formă de puteri folosind aducerea la aceeași bază sau la același exponent
- Aplicarea criteriilor de divizibilitate a numerelor naturale pentru situații cotidiene
- Estimarea ordinului de mărime a numerelor de forma 2^n , pornind de la probleme practice (de exemplu, foi de hârtie îndoite consecutiv, povestea tablei de șah)
- Realizarea unor estimări utilizând procente (de exemplu, cunoscând numărul elevilor de gimnaziu dintr-un oraș și faptul că aproximativ 2% dintre aceștia studiază un instrument muzical, estimați numărul de elevi de gimnaziu care studiază un instrument muzical)
- Stabilirea valorii de adevăr a unui enunț matematic cu numere naturale, folosind metode aritmetice

6.1. Modelarea matematică, folosind numere naturale, a unei situații date, rezolvarea problemei obținute prin metode aritmetice și interpretarea rezultatului

- Modelarea unor probleme practice utilizând metode aritmetice (metoda reducerii la unitate, metoda comparației, metoda figurativă, metoda mersului invers etc.)
- Evidențierea unor situații în care metoda de rezolvare propusă este aplicată incorect
- Exemplificarea, folosind gândirea critică, a unor probleme cu date insuficiente, a unor probleme cu date contradictorii etc.
- Formularea unei probleme pe baza unei scheme sau reguli date și rezolvarea acesteia prin metode aritmetice (metoda reducerii la unitate, metoda comparației, metoda figurativă, metoda mersului invers etc.)

[...]

Domeniul de conținut	Conținuturi
Numere	<p>1. NUMERE NATURALE</p> <p>Operații cu numere naturale</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Scrierea și citirea numerelor naturale; reprezentarea pe axa numerelor; compararea și ordonarea numerelor naturale; aproximări, estimări ● Adunarea numerelor naturale, proprietăți; scăderea numerelor naturale ● Înmulțirea numerelor naturale, proprietăți; factor comun ● Împărțirea cu rest zero a numerelor naturale; împărțirea cu rest a numerelor naturale ● Puterea cu exponent natural a unui număr natural; pătratul unui număr natural; reguli de calcul cu puteri; compararea puterilor; scrierea în baza 10; scrierea în baza 2 (fără operații) ● Ordinea efectuării operațiilor; utilizarea parantezelor: rotunde, pătrate și acolade ● Metode aritmetice de rezolvare a problemelor: metoda reducerii la unitate, metoda comparației, metoda figurativă, metoda mersului invers, metoda falsei ipoteze <p>Divizibilitatea numerelor naturale</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Divizor; multiplu; divizori comuni; multipli comuni ● Criterii de divizibilitate cu: 2, 5, 10^n, 3 și 9; numere prime; numere compuse

Notă: Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Pentru o evaluare la finalul unității de învățare „**Numere naturale**”, folosind informațiile din secvența precedentă, elaborați 3 itemi : *un item de tip alegere multiplă, un item de tip întrebare structurată și un item de tip rezolvare de probleme.*

În elaborarea itemilor se vor avea în vedere următoarele aspecte:

- menționarea competenței specifice evaluate;
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat
- respectarea formatului fiecărui tip de item elaborat;
- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)
- corectitudinea științifică a informației de specialitate.

EXAMENUL NAȚIONAL DE DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNT
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

1.	<p>a) Pentru $m = \frac{9}{13}$ obținem ecuația $9 \cdot 49^x - 16 \cdot 7^x - 4 = 0$.</p> <p>Notăm $7^x = t > 0$ și ecuația devine: $9t^2 - 16t - 4 = 0$ cu soluțiile $t_1 = 2$ și $t_2 = -\frac{2}{9}$</p> <p>Obținem $7^x = 2$ și $x = \log_7 2$.</p>	3p
	<p>b) $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow mt^2 + 4(m-1)t + m-1 > 0, \forall t > 0, t = 7^x$.</p> <p>Trebuie ca: $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P \geq 0 \\ S \leq 0 \end{cases}$. Obținem $m \in [1; +\infty)$.</p>	4p 4p
2.	<p>a) $BCMP$ patrulater inscriptibil $\Rightarrow \sphericalangle MBC = \sphericalangle MPC$</p> <p>$\sphericalangle AMB$ unghi exterior $\Delta MBC \Rightarrow \sphericalangle AMB = \sphericalangle MCB + \sphericalangle MBC$</p> <p>Astfel, obținem $\sphericalangle AMB = \sphericalangle ACB + \sphericalangle MPC$.</p>	3p 4p
	<p>b) BA mediatoarea lui $MN \Rightarrow \Delta BMN$ isoscel și apoi $\sphericalangle BMN \equiv \sphericalangle BNM$.</p> <p>$BCMP$ patrulater inscriptibil $\Rightarrow \sphericalangle BMC \equiv \sphericalangle BPC \equiv \sphericalangle APR$, unde $\{R\} = CP \cap BN$.</p> <p>$\sphericalangle BMN + \sphericalangle BMC = 180^\circ$ și, folosind congruențele anterioare, deducem că $\sphericalangle BNM + \sphericalangle APR = 180^\circ$</p> <p>Obținem $ANRP$ patrulater inscriptibil $\Rightarrow \sphericalangle NRP = 180^\circ - \sphericalangle NAP = 90^\circ \Rightarrow CR$ înălțime în ΔNBC</p> <p>Cum și BA înălțime în ΔNBC, iar $\{P\} = BA \cap CR \Rightarrow P$ ortocentrul triunghiului NBC</p>	4p 4p
3.	<p>a) Utilizând relațiile lui Viète, obținem:</p> $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_4)^2 = 3S_1^2 - 8S_2 = 0$ <p>Obținem $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -1$, de unde $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = -4 \in \mathbb{Z}$.</p>	4p 3p
	<p>b) Pentru $a = b = c = d = 1, f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.</p> <p>Pentru α o rădăcină oarecare a lui $f \Rightarrow f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \Rightarrow (\alpha - 1)(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) = 0 \Rightarrow \alpha^5 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^5 = 1 \Rightarrow \alpha^5 = 1 \Rightarrow x_1^5 = x_2^5 = x_3^5 = x_4^5 = 1$</p> <p>Obținem $x_1^{18} + x_2^{28} + x_3^{38} + x_4^{48} = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = -1$</p>	4p 4p
4.	<p>a) Fie $g: (-1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x \Rightarrow g'(x) = \ln(x+1) + 1 - 1 = \ln(x+1), \forall x \in (-1; +\infty)$.</p>	3p

Din studiul monotoniei funcției g obținem $g(x) \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$. De aici obținem: $(x + 1)\ln(x + 1) \geq x, \forall x \in (-1; +\infty) \Rightarrow e^{(x+1)\ln(x+1)} \geq e^x, \forall x \in (-1; +\infty) \Rightarrow$ $\Rightarrow (x + 1)^{x+1} \geq e^x \Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$	4p
b) $I_n = \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' \cdot f(x) dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot f(x) \Big _0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} \cdot f'(x) dx =$ $= \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} \cdot f'(x) dx$	3p
Obținem $nI_n = \frac{n}{n+1} \cdot f(1) - \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} \cdot f'(x) dx.$	3p
Deoarece f' mărginită pe $[0; 1]$, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^{n+1} \cdot f'(x) dx = 0.$	3p
Deci, $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = 1 \cdot f(1) - 1 \cdot 0 = f(1) = 4 - e.$	2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

<i>Itemul de tip alegere multiplă</i> elaborat :	
- menționarea competenței specifice evaluate	1p
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat	1p
- respectarea formatului itemului	2p
- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)	3p
- corectitudinea științifică a informației de specialitate	3p
<i>Itemul de tip întrebare structurată</i> elaborat :	
- menționarea competenței specifice evaluate	1p
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat	1p
- respectarea formatului itemului	2p
- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)	3p
- corectitudinea științifică a informației de specialitate	3p
<i>Itemul de tip rezolvare de probleme</i> elaborat :	
- menționarea competenței specifice evaluate	1p
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat	1p
- respectarea formatului itemului	2p
- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)	3p
- corectitudinea științifică a informației de specialitate	3p

**EXAMENUL NAȚIONAL PENTRU DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL
PREUNIVERSITAR
MATEMATICĂ**

Model 3

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| | 1. Numerele strict pozitive b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 sunt în progresie geometrică, astfel încât suma logaritmilor, în baza 5 din aceste numere este egală cu 10. |
| 7p | a) Arătați că $b_3 = 25$. |
| 8p | b) Determinați numerele b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 știind că $\log_5 \frac{b_3}{b_1} = -2$. |
| | 2. Se consideră punctele $A(3, 2)$ și $C(5, -1)$. |
| 7p | a) Dacă z_A, z_C sunt afixele punctelor A respectiv C, determinați soluțiile ecuației $z^3 = \frac{z_C}{z_A}$. |
| 8p | b) Determinați coordonatele punctelor B și D, astfel încât punctele A, B, C, D, în această ordine să fie vârfurile unui pătrat. |
| | 3. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = axy + bx + by + c$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$. |
| 7p | a) Pentru $a = 1, b = -\sqrt{2}, c = 8\sqrt{2} + 1$, determinați divizorii lui $3 \circ 5$ din intervalul $(-4, 8]$. |
| 8p | b) Determinați numerele reale a, b, c, știind că $e = 6$ este elementul neutru și că orice element $x \neq 5$ admite un simetric. |
| | 4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x + a \cdot x$. |
| 7p | a) Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției f să admită ca asimptotă oblică dreapta de ecuație $y = -e^2 x$. |
| 8p | b) Arătați că $\int_{-1}^3 (e^x - e^2 x) dx \geq -2e^2$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VI-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

<p>Clasa a VI-a</p> <p>1.6. Recunoașterea unor elemente de geometrie plană asociate noțiunii de triunghi</p> <ul style="list-style-type: none">- Recunoașterea unor triunghiuri isoscele/echilaterale/ascuțitunghice/dreptunghice/obtusunghice în configurații geometrice date- Recunoașterea elementelor caracteristice triunghiurilor în desene, machete, mediul înconjurător etc.- Descrierea unor caracteristici ale configurațiilor geometrice date referitoare la triunghi (prin observare, prin utilizarea instrumentelor geometrice)- Recunoașterea unor triunghiuri congruente într-o configurație geometrică dată
--

2.6. Calcularea unor lungimi de segmente, măsuri de unghiuri în contextul geometriei triunghiului

- Stabilirea tipului de triunghi prin efectuarea de calcule numerice cu lungimi de segmente și măsuri de unghiuri
- Efectuarea de calcule numerice pentru formularea de răspunsuri privind liniile importante în triunghi
- Efectuarea de măsurători cu raportorul și rigla pentru formularea de răspunsuri privind unghiurile exterioare ale unui triunghi, inegalități între laturi/unghiuri ale unui triunghi

3.6. Utilizarea criteriilor de congruență și a proprietăților unor triunghiuri particulare pentru determinarea caracteristicilor unei configurații geometrice

- Stabilirea congruenței unor triunghiuri identificând criteriul de congruență potrivit
- Utilizarea relației de congruență a triunghiurilor pentru stabilirea congruenței unor segmente sau unghiuri
- Utilizarea proprietăților triunghiurilor isoscele/echilaterale/dreptunghice pentru determinarea unor lungimi de segmente, distanțe, măsuri de unghiuri, proprietăți ale punctelor de pe mediatoare, bisectoare

4.6. Exprimarea în limbaj geometric simbolic și figurativ a caracteristicilor triunghiurilor și ale liniilor importante în triunghi

- Transcrierea în limbaj simbolic a caracteristicilor triunghiurilor conținute în figuri geometrice date
- Transcrierea, din figuri geometrice date, în limbaj simbolic a caracteristicilor liniilor importante în triunghi
- Redactarea datelor cunoscute (ipoteze) și a celor necunoscute (concluzii), în raport cu o situație dată referitoare la triunghi
- Evidențierea unor relații și proprietăți: unghi exterior unui triunghi, inegalități între laturi și relații între laturi și unghiuri ale unui triunghi etc.

5.6. Analizarea unor construcții geometrice în vederea evidențierii unor proprietăți ale triunghiurilor

- Construcția unei configurații geometrice cu triunghiuri având proprietăți date, cu ajutorul instrumentelor geometrice sau al softurilor matematice
- Analizarea setului de ipoteze ale unei probleme și elaborarea unei strategii de rezolvare prin raportarea adecvată la proprietățile studiate ale triunghiurilor
- Analizarea și validarea veridicității unei afirmații folosind raționamente simple referitoare la triunghi
- Analizarea validității unor enunțuri referitoare la triunghiuri rezultate prin modificarea unei ipoteze (necesar/suficient) sau prin interschimbarea unor informații din ipoteză și din concluzie

6.6. Transpunerea, în limbaj specific, a unei situații date legate de geometria triunghiului, rezolvarea problemei obținute și interpretarea rezultatului

- Modelarea geometrică a unei situații concrete, asociind acesteia un desen, implicând și estimări (de exemplu, un traseu acasă – școală – teren de sport, reprezentat printr-un triunghi)
- Argumentarea demersului de rezolvare a unei probleme de geometrie
- Realizarea de conexiuni interdisciplinare sau practic-aplicative (de exemplu: planul înclinat, traseul de lungime minimă, reflexia)

[...]

Domeniul de conținut	Conținuturi
Geometrie	<p>6. TRIUNGHIUL</p> <ul style="list-style-type: none"> • Triunghiul: definiție, elemente; clasificare; perimetru; suma măsurilor unghiurilor unui triunghi; unghi exterior unui triunghi, teorema unghiului exterior • Construcția triunghiurilor: cazurile LUL, ULU, LLL; inegalități între elementele triunghiului (observate din cazurile de construcție) • Linii importante în triunghi: bisectoarele unghiurilor unui triunghi: concurența (fără demonstrație), cercul înscris în triunghi; mediatoarele laturilor unui triunghi: concurență (fără demonstrație), cercul circumscris unui triunghi; înălțimile unui triunghi: definiție, construcție, concurența (fără demonstrație); medianele unui triunghi: definiție, construcție, concurența (fără demonstrație) • Congruența triunghiurilor oarecare: criterii de congruență a triunghiurilor: LUL, ULU, LLL; criteriile de congruență a triunghiurilor dreptunghice: CC, IC, CU, IU • Metoda triunghiurilor congruente, aplicații: proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi/mediatoarea unui segment • Proprietăți ale triunghiului isoscel; proprietăți ale triunghiului echilateral • Proprietăți ale triunghiului dreptunghic (cateta opusă unghiului de 30°, mediana corespunzătoare ipotenuzei – teoreme directe și reciproce); teorema lui Pitagora (fără demonstrație, verificări de triplete de numere pitagoreice, determinarea de lungimi folosind pătratele unor numere naturale)

Notă: Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Pentru o evaluare la finalul unității de învățare „**Triunghiul**”, folosind informațiile din secvența precedentă, elaborați 3 itemi : *un item de completare, un item de tip alegere multiplă și un item de tip rezolvare de probleme.*

În elaborarea itemilor se vor avea în vedere următoarele aspecte:

- menționarea competenței specifice evaluate;
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat
- respectarea formatului fiecărui tip de item elaborat;
- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)
- corectitudinea științifică a informației de specialitate.

EXAMENUL NAȚIONAL DE DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNT
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

1.	<p>a) $\log_5 b_1 + \log_5 b_2 + \log_5 b_3 + \log_5 b_4 + \log_5 b_5 = \log_5 (b_1 b_2 b_3 b_4 b_5) =$ $= \log_5 \frac{b_3}{q^2} \cdot \frac{b_3}{q} \cdot b_3 \cdot (b_3 \cdot q) \cdot (b_3 \cdot q^2)$ $\log_5 b_3^5 = 10 \Rightarrow b_3^5 = 5^{10} \Rightarrow b_3 = 25$</p>	3p
	<p>b) $\log_5 q^2 = -2 \Rightarrow q = \frac{1}{5}$ 625;125;25;5;1</p>	4p
		4p
2.	<p>a) $\frac{z_C}{z_A} = 1 - i$ $z^3 = 1 - i$ $1 - i = r(\cos t + i \sin t)$ $z^3 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$ $z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{t + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{t + 2k\pi}{n} \right), k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$ $z_0 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$ $z_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{15\pi}{12} + i \sin \frac{15\pi}{12} \right)$ $z_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{23\pi}{12} + i \sin \frac{23\pi}{12} \right)$</p>	3p
	<p>b) $ABCD$ este pătrat dacă diagonalele au același mijloc, au lungimi egale și sunt perpendiculare. Fie O mijlocul lui AC, atunci avem $x_D + x_B = 8$ și $y_D + y_B = 1$ $BD = AC \Rightarrow (x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 = 13$</p>	4p

	$BD \perp AC \Rightarrow m_{BD} = \frac{2}{3}$ $y_D - y_B = \frac{2}{3}(x_D - x_B)$ $(x_D - x_B)^2 = 9 \Rightarrow x_D - x_B = 3 \text{ sau } x_D - x_B = -3$ <p>Dacă $x_D - x_B = 3 \Rightarrow$ avem $B\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right); D\left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right)$</p> <p>Dacă $x_D - x_B = -3 \Rightarrow$ avem $B\left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right); D\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$</p>	4p
3.	<p>a) $3 \circ 5 = 15 - 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 8\sqrt{2} + 1 = 16$</p> $D_{16} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\}$ $D_{16} \cap (-4, 8] = \{-2, -1, 1, 2, 4, 8\}$	3p 4p
	<p>b) $x \circ 6 = 6 \circ x = x$</p> $6 \circ x = x \Rightarrow x(6a + b - 1) + 6b + c = 0 \Rightarrow$ $6a + b - 1 = 0 \text{ și } 6b + c = 0 \Rightarrow$ $b = 1 - 6a \text{ și } c = 36a - 6$ <p>Fie x^{-1} simetricul lui x, avem $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = 6$</p> <p>Dacă $ax + b \neq 0$ atunci $x^{-1} = \frac{-(bx + c - 6)}{ax + b}$</p> $ax + b \neq 0, \forall x \neq 5 \Rightarrow 5a + b = 0 \Rightarrow a = 1$ $b = -5 \text{ și } c = 30$ $x \circ y = xy - 5x - 5y + 20$	4p 4p
4.	<p>a) funcția nu admite asimptotă oblică la $+\infty$</p> $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + ax}{x} = a$ $n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + ax - ax = 0$ <p>Din $y = ax$ și $y = -e^2x \Rightarrow a = -e^2$</p>	3p 4p
	<p>b) fie $f : R \rightarrow R, f(x) = e^x - e^2x$</p> $f'(x) = e^x - e^2$ <p>$x \in (-\infty, 2], f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ descrescătoare; $x \in [2, \infty) f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ crescătoare;</p> <p>$f'(2) = 0 \Rightarrow f(2) = -e^2$ este minimul funcției pe R; $f(x) \geq f(2), \forall x \in R$</p> $\int_{-1}^3 (e^x - e^2x) dx \geq \int_{-1}^3 (-e^2) dx$ $\int_{-1}^3 (e^x - e^2x) dx \geq -2e^2$	3p 3p 2p

SUBIECTUL al II-lea**(30 de puncte)**

<i>Itemul de completare</i> elaborat : - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate	1p 1p 2p 3p 3p
<i>Itemul de tip alegere multiplă</i> elaborat : - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate	1p 1p 2p 3p 3p
<i>Itemul de tip rezolvare de probleme</i> elaborat : - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate	1p 1p 2p 3p 3p

**EXAMENUL NAȚIONAL PENTRU DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL
PREUNIVERSITAR
MATEMATICĂ**

Model 4

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

-
1. Se consideră funcția $f : (-\infty, 0] \rightarrow [3, +\infty)$, $f(x) = 2 + \sqrt{1+x^2}$.
- 7p a) Arătați că funcția este bijectivă.
- 8p b) Rezolvați ecuația $x^2 + f(x) = 7$.
2. În triunghiul ABC notăm M, N, P mijloacele laturilor BC, AC, AB și D, E, F picioarele înălțimilor duse din A, B, C respectiv cu H ortocentrul triunghiului și cu T mijlocul segmentului AH .
- 7p a) Arătați că $PDMN$ este trapez isoscel, $D \in (CM)$.
- 8p b) Demonstrați că $PT \perp PM$.
3. Se consideră mulțimea $G = \{x \in \mathbb{C} \mid x^3 + ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbb{C}\}$.
- 7p a) Pentru $a = 1, b = 1, c = 1$ determinați mulțimea G .
- 8p b) Determinați $a, b, c \in \mathbb{C}$, știind că (G, \cdot) formează grup.
4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4 + 1}}$.
- 7p a) Arătați că funcția f este descrescătoare pe $(1, \infty)$.
- 8p b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_n^{2n} xf(x) dx$

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a V-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

Clasa a V-a
1.2. Identificarea fracțiilor ordinare sau zecimale în contexte variate
- Utilizarea unor reprezentări grafice variate pentru ilustrarea fracțiilor echiunitare, subunitare supraunitare
- Verificarea echivalenței a două fracții prin diferite reprezentări
- Scrierea unui procent sub formă de fracție ordinară (de exemplu, 20% se scrie $\frac{20}{100}$)
- Identificarea unor date statistice din diagrame, tabele sau grafice

2.2. Efectuarea de calcule cu fracții folosind proprietăți ale operațiilor aritmetice

- *Introducerea și scoaterea întregilor dintr-o fracție ordinară*
- *Înmulțirea și împărțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule cu 10, 100, 1000*
- *Scrierea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule ca un produs dintre un număr zecimal și o putere a lui 10; scrierea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule ca un cât dintre un număr zecimal și o putere a lui 10*
- *Calcularea unei fracții echivalente cu o fracție dată, prin amplificarea sau simplificarea*
- *Simplificarea unei fracții ordinare în vederea obținerii unei fracții ireductibile (prin simplificări succesive, dacă este cazul)*
- *Efectuarea de operații cu numere raționale exprimate sub formă de fracție zecimală și/sau ordinară*

3.2. Utilizarea de algoritmi pentru efectuarea operațiilor cu fracții ordinare sau zecimale

- *Aplicarea algoritmilor de împărțire a unei fracții zecimale la un număr natural sau la o fracție zecimală cu un număr finit de zecimale nenule*
- *Transformarea fracțiilor ordinare în fracții zecimale și invers*
- *Aplicarea metodelor aritmetice pentru rezolvarea unor probleme cu fracții*

4.2. Utilizarea limbajului specific fracțiilor/procentelor în situații date

- *Încadrarea unei fracții zecimale între două numere naturale consecutive*
- *Utilizarea limbajului specific pentru determinarea unei fracții dintr-un număr natural n , multiplu al numitorului fracției*
- *Utilizarea limbajului adecvat pentru exprimarea unor transformări monetare (inclusiv schimburi valutare)*

5.2. Analizarea unor situații date în care intervin fracții pentru a estima sau pentru a verifica validitatea unor calcule

- *Reprezentarea pe axa numerelor a fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule folosind aproximarea acestora*
- *Analizarea unor scheme, modele sau algoritmi pentru rezolvarea unor probleme practice care implică utilizarea operațiilor cu fracții ordinare sau zecimale și ordinea efectuării operațiilor*
- *Evidențierea, pe cazuri concrete, a relației dintre volum și capacitate*
- *Estimarea măsurilor unor mărimi caracteristice ale unor obiecte din mediul înconjurător (capacitate, masă, preț)*
- *Estimarea mediei unui set de date; compararea estimării cu valoarea determinată prin calcule*

6.2. Reprezentarea matematică, folosind fracțiile, a unei situații date, în context intra și interdisciplinar (geografie, fizică, economie etc.)

- *Formularea unor probleme cu fracții, pe baza unor scheme sau reguli date și rezolvarea acestora prin metode aritmetice (metoda reducerii la unitate, metoda comparației, metoda mersului invers etc.)*
- *Reprezentarea datelor statistice folosind softuri matematice*
- *Argumentarea demersului de rezolvare a unei probleme pornind de la un set de informații cu caracter cotidian sau științific (fizic, economic etc.)*

[...]

Domeniul de conținut	Conținuturi
<p>Numere. Organizarea datelor</p>	<p>2. FRAȚII ORDINARE. FRAȚII ZECIMALE</p> <p>Fracții ordinare</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Fracții ordinare; fracții subunitare, echiunitare, supraunitare; procente; fracții echivalente (prin reprezentări) ● Compararea fracțiilor cu același numitor/numărător; reprezentarea pe axa numerelor a unei fracții ordinare ● Introducerea și scoaterea întregilor dintr-o fracție ● Cel mai mare divizor comun a două numere naturale (fără algoritm); amplificarea și simplificarea fracțiilor; fracții ireductibile ● Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale (fără algoritm); aducerea fracțiilor la un numitor comun ● Adunarea și scăderea fracțiilor ● Înmulțirea fracțiilor, puteri; împărțirea fracțiilor ● Fracții/procente dintr-un număr natural sau dintr-o fracție ordinară <p>Fracții zecimale</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Fracții zecimale; scrierea fracțiilor ordinare cu numitori puteri ale lui 10 sub formă de fracții zecimale; transformarea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule în fracție ordinară ● Aproximări; compararea, ordonarea și reprezentarea pe axa numerelor a unor fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule ● Adunarea și scăderea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule ● Înmulțirea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule ● Împărțirea a două numere naturale cu rezultat fracție zecimală; aplicație: media aritmetică a două sau mai multor numere naturale; transformarea unei fracții ordinare într-o fracție zecimală; periodicitate ● Împărțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule la un număr natural nenul; împărțirea a două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule ● Transformarea unei fracții zecimale periodice în fracție ordinară ● Număr rațional pozitiv; ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale pozitive ● Metode aritmetice pentru rezolvarea problemelor cu fracții în care intervin și unități de măsură pentru lungime, arie, volum, capacitate, masă, timp și unități monetare ● Probleme de organizare a datelor; frecvență; date statistice organizate în tabele, grafice bare și/sau cu linii; media unui set de date statistice

Notă: Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Pentru o evaluare la finalul unității de învățare „**Fracții zecimale.Fracții ordinare**” folosind informațiile din secvența precedentă, elaborați 3 itemi : *un item de completare, un item de tip pereche și un item de tip rezolvare de probleme.*

În elaborarea itemilor se vor avea în vedere următoarele aspecte:

- menționarea competenței specifice evaluate;
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat
- respectarea formatului fiecărui tip de item elaborat;
- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)
- corectitudinea științifică a informației de specialitate.

EXAMENUL NAȚIONAL DE DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNT
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

1.	a) Ecuația $f(x) = y$, $y \in [3, +\infty)$ are soluție unică $x = -\sqrt{(y-2)^2 - 1} \in (-\infty, 0]$	3p
	$x = -\sqrt{(y-2)^2 - 1} \in (-\infty, 0]$	4p
	b) $y = \sqrt{x^2 + 1} \geq 0$, $y^2 + y - 6 = 0$, $y = -3$ nu convine, $y = 2$ care convine $\sqrt{x^2 + 1} = 2$, $x = -\sqrt{3}$ care convine, $x = \sqrt{3}$ nu convine	4p
	$\sqrt{x^2 + 1} = 2$, $x = -\sqrt{3}$ care convine, $x = \sqrt{3}$ nu convine	4p
2.	a) PN este linie mijlocie în triunghiul ABC , deci $PN \parallel BC$; $D, M \in BC$, deci $PN \parallel DM$, deci $PDMN$ este trapez; MN este linie mijlocie în triunghiul ABC , deci, $MN = AB/2$ DP este mediană în triunghiul ABD (dreptunghic), deci $DP = AB/2 \Rightarrow MN = DP$, deci trapezul $PDMN$ este isoscel	3p
	DP este mediană în triunghiul ABD (dreptunghic), deci $DP = AB/2 \Rightarrow MN = DP$, deci trapezul $PDMN$ este isoscel	4p
	b) PT este linie mijlocie în triunghiul AHB , deci $PT \parallel BH$; PM este linie mijlocie în triunghiul ABC , $PM \parallel AC$ Dar $AC \perp BH$, deci $PT \perp PM$	4p
	Dar $AC \perp BH$, deci $PT \perp PM$	4p
3.	a) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 1) = 0$ $G = \{-1, i, -i\}$	3p
	$G = \{-1, i, -i\}$	4p
	b) Fie x_1, x_2, x_3 soluțiile ecuației $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Dacă $G = \{1\} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 1$ și $a=-3, b=3, c=-1$, $G = \{0\}$, $a=b=c=0$ Dacă $G = \{-1, 1\} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -1$ și $a=1, b=c=-1$ sau $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$ și $a=b=-1, c=1$ Dacă $G = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$, $a=b=0, c=-1$	4p
	Dacă $G = \{-1, 1\} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -1$ și $a=1, b=c=-1$ sau $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$ și $a=b=-1, c=1$ Dacă $G = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$, $a=b=0, c=-1$	4p
4.	a) $f'(x) = \frac{1-x^4}{(1+x^4)\sqrt{1+x^4}} = \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)}{(1+x^4)\sqrt{1+x^4}}$	3p
	$f'(x) < 0$ pentru $x \in (1, \infty)$, deci f este descrescătoare pe $(1, \infty)$	4p

	<p>b) Putem scrie $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_x^{2x} t f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{1+t^4}} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{1+t^4}} dt}{x}$</p>	3p
	$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{G(2x) - G(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2G'(2x) - G'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{4x^2}{\sqrt{1+16x^4}} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}$	3p
	$= 8 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 1$, unde $G(x)$ este o primitivă a funcției $t \cdot f(t)$	2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

<p><i>Itemul de completare</i> elaborat :</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>3p</p>
<p><i>Itemul de tip pereche</i> elaborat :</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>3p</p>
<p><i>Itemul de tip rezolvare de probleme</i> elaborat :</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>3p</p>

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE
MATEMATICĂ

Model 1

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

-
1. Se consideră familia de funcții de gradul al doilea $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f_m(x) = x^2 - 2(m - 2)x + m - 2$, $m \in \mathbb{R}$ cu rădăcinile x_1 și x_2 .
- 5p a) Arătați că vârfurile parabolilor asociate acestor funcții se găsesc pe o parabolă.
- 5p b) Determinați mulțimea valorilor expresiei $x_1^2 + x_2^2$, știind că vârful parabolei asociate funcției f_m nu este sub axa Ox .
- 5p c) Aflați pentru ce valori ale lui m are loc relația $x_1 < x_2 < 3$.
2. Se consideră pătratul $ABCD$ și punctele M , N și Q astfel încât M să aparțină laturii BC , N să fie pe prelungirea laturii CD și $BM \equiv DN$, iar Q să fie simetricul lui A față de MN .
- 5p a) Arătați că triunghiul AMN este dreptunghi isoscel.
- 5p b) Demonstrați că $AMQN$ este pătrat.
- 5p c) Arătați că dreptele MN , BD și AQ sunt concurente.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

-
1. Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție bijectivă cu $f(1) = 8$. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = f^{-1}(f(x) + f(y) - 8)$.
- 5p a) Arătați că legea „ $*$ ” este asociativă.
- 5p b) Determinați elementul neutru al legii „ $*$ ”.
- 5p c) Există funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât numărul 2 să fie egal cu simetricul lui în raport cu legea „ $*$ ”? Justificați răspunsul.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \arctg x - \ln(1 + x^2)$.
- 5p a) Studiați monotonia funcției f .
- 5p b) Arătați că $\arctg \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n-1} \ln \left(e^{\frac{\pi}{4}} \frac{2n^2 - 2n + 1}{2n^2} \right)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p c) Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_0^1 f^n(x) dx} = \frac{\pi}{4} - \ln 2$.

SUBIECTUL al III-lea**(30 de puncte)**

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VI-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

Clasa a VI-a
1.2. Identificarea rapoartelor, proporțiilor și a mărimilor direct sau invers proporționale <ul style="list-style-type: none">- Identificarea, citirea, scrierea și exemplificarea de rapoarte, procente- Identificarea, citirea, scrierea și exemplificarea de proporții și mărimi direct sau invers proporționale din practică/cotidian sau în context intradisciplinar sau interdisciplinar (de exemplu: scara unei hărți, concentrația unei soluții)- Identificarea unor mărimi direct proporționale în reprezentări grafice
2.2. Prelucrarea cantitativă a unor date utilizând rapoarte și proporții pentru organizarea de date <ul style="list-style-type: none">- Determinarea unui procent dintr-un număr dat; determinarea unui număr, când se cunoaște un procent din el (de exemplu: reducerea/creșterea prețului unui produs, concentrația unei soluții)- Calcularea unei valori necunoscute dintr-o proporție- Calcularea unor numere folosind un șir de rapoarte egale- Calcularea valorii unui raport folosind un șir de rapoarte egale- Organizarea și reprezentarea de date sub formă de grafice, tabele sau diagrame statistice în vederea înregistrării, prelucrării și prezentării acestora
3.2. Aplicarea unor metode specifice de rezolvare a problemelor în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct/invers proporționale <ul style="list-style-type: none">- Determinarea unui termen necunoscut dintr-o proporție- Rezolvarea de probleme în care intervin rapoarte, procente sau proporții- Stabilirea proporționalității (directe sau inverse) între două mărimi și rezolvarea de probleme în care intervin mărimi direct sau invers proporționale, în contexte practic-aplicative sau interdisciplinare- Utilizarea unor reguli specifice pentru obținerea de proporții derivate (numai pe exemple numerice)- Calcularea probabilității în contexte practic aplicative simple
4.2. Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor și a mărimilor care apar în probleme cu rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale <ul style="list-style-type: none">- Exprimarea relației de proporționalitate directă sau inversă între mărimi sub forma unei proporții sau a unei egalități de produse- Exprimarea în limbaj matematic a datelor unei probleme care se rezolvă cu regula de trei simplă- Determinarea valorilor minime, maxime și medii dintr-un set de date- Organizarea informațiilor pe baza unor criterii, utilizând sortarea, clasificarea și reprezentarea grafică (cu accent pe interpretarea aceluiași set de date în contexte diferite și pe utilizarea softurilor matematice)
5.2. Analizarea unor situații practice cu ajutorul rapoartelor, proporțiilor și a colecțiilor de date <ul style="list-style-type: none">- Justificarea proporționalității în vederea aplicării regulii de trei simplă- Interpretarea datelor înregistrate în tabele, grafice sau diagrame; estimări- Analizarea unui set de date pentru a determina existența unei proporționalități (de exemplu: economie, cotidian)- Interpretarea mediei unui set de date- Exprimarea semnificației unor elemente dintr-un grafic
6.2. Modelarea matematică a unei situații date în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale <ul style="list-style-type: none">- Modelarea matematică a dependențelor direct sau invers proporționale- Interpretarea unui set de date descrise grafic sau numeric (de exemplu: dacă viteza este constantă, atunci distanța și timpul sunt în relație de proporționalitate directă; dacă distanța este constantă, atunci viteza și timpul sunt în relație de proporționalitate inversă)- Interpretarea unui raport ca raport procentual sau ca probabilitate

[...]

Domeniul de conținut	Conținuturi
Numere. Organizarea datelor și probabilități	2. RAPOARTE. PROPORȚII <ul style="list-style-type: none"> • Rapoarte; proporții; proprietatea fundamentală a proporțiilor; determinarea unui termen necunoscut dintr-o proporție; proporții derivate • Șir de rapoarte egale; mărimi direct proporționale; mărimi invers proporționale; regula de trei simplă • Elemente de organizare a datelor; reprezentarea datelor prin grafice în contextul proporționalității; reprezentarea datelor cu ajutorul unor softuri matematice; probabilități (aplicație la rapoarte)

Notă: Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Folosind informațiile din secvența de mai sus, în vederea evaluării formării/dezvoltării competențelor specifice precizate, elaborați o probă de evaluare la finalul unității de învățare „**Rapoarte. Proporții**”, care să cuprindă cinci itemi: *un item de completare, un item de tip pereche, un item de tip alegere multiplă, un item de tip întrebare structurată și un item de tip rezolvare de probleme.*

Pentru fiecare item propus:

- menționați competența specifică evaluată
- menționați activitatea de învățare în cadrul căreia ați utiliza acest item
- precizați un avantaj al utilizării acestui tip de item
- precizați un dezavantaj al utilizării acestui tip de item
- respectați formatul tipului de item
- respectați corectitudinea științifică, inclusiv a răspunsului așteptat

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE
MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	<p>a) $x_v = m - 2$ și $y_v = -m^2 + 5m - 6$. Obținem $y_v = -x_v^2 + x_v$. Deci, vârfurile aparțin parabolei: $y = -x^2 + x$.</p>	3p 2p
	<p>b) $y_v \geq 0 \Rightarrow m \in [2; 3]$. Obținem $x_1^2 + x_2^2 = 4m^2 - 18m + 20$, pentru $m \in [2; 3]$. Deducem $x_1^2 + x_2^2 \in \left[-\frac{1}{4}; 2\right]$.</p>	3p 2p
	<p>c) Trebuie ca: $\Delta > 0$, $af(3) > 0$, $-\frac{b}{2a} < 3$. Deducem că: $m \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$; $m \in \left(-\infty; \frac{19}{5}\right)$; $m \in (-\infty; 5)$. Obținem $m \in (-\infty; 2) \cup \left(3, \frac{19}{5}\right)$</p>	2p 2p 1p
2.	<p>a) $\Delta ABM \equiv \Delta ADN \Rightarrow \sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle DAN$ și $AM \equiv AN$ $\sphericalangle BAM + \sphericalangle MAD = 90^\circ$ și obținem $\sphericalangle DAN + \sphericalangle MAD = 90^\circ$ $\Rightarrow \Delta AMN$ dreptunghic isoscel.</p>	3p 2p
	<p>b) Fie $AQ \cap MN = \{O\}$. Cum ΔAMN dreptunghic isoscel și $AQ \perp MN \Rightarrow OM \equiv ON$ Dar și $AO \equiv OQ$ și obținem $AMQN$ paralelogram Avem $\sphericalangle MAN = 90^\circ$ și $AM \equiv AN$ și deducem $AMQN$ pătrat.</p>	3p 2p
	<p>c) Fie $BD \cap MN = \{P\}$. Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul NMC, obținem: $\frac{NP}{PM} \cdot \frac{DC}{ND} \cdot \frac{BM}{BC} = 1$ Dar $BM \equiv DN$ și $DC \equiv BC$ și, după simplificări, obținem $\frac{NP}{PM} = 1$, adică P este mijlocul lui MN. Deci, $P = O$ și obținem $AQ \cap MN \cap BD = \{O\}$.</p>	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	<p>a) $(x * y) * z = f^{-1}(f(x) + f(y) - 8) * z = f^{-1}(f(f^{-1}(f(x) + f(y) - 8) + f(z) - 8)) = f^{-1}(f(x) + f(y) - 8 + f(z) - 8) = f^{-1}(f(x) + f(y) + f(z) - 16)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $x * (y * z) = x * f^{-1}(f(y) + f(z) - 8)$ $= f^{-1}(f(x) + f(f^{-1}(f(y) + f(z) - 8)) - 8) =$ $= f^{-1}(f(x) + f(y) + f(z) - 8 - 8) = f^{-1}(f(x) + f(y) + f(z) - 16)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$. Prin urmare, legea „$*$” este asociativă.</p>	2p 3p
	<p>b) Fie $e \in \mathbb{R}$, elementul neutru al legii. Cum legea este comutativă, avem $x * e = e * x$. Din $x * e = x \Rightarrow f^{-1}(f(x) + f(e) - 8) = x \Rightarrow f(x) + f(e) - 8 = f(x)$. Obținem $f(e) = 8$ și cum f este injectivă, iar $f(1) = 8$, deducem că $e = 1$.</p>	3p 2p
	<p>c) Presupunem că ar exista funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $2 = 2'$. Din $2 * 2 = 1 \Rightarrow f^{-1}(f(2) + f(2) - 8) = 1 \Rightarrow 2f(2) - 8 = f(1)$. Obținem $f(2) = 8 = f(1)$, în contradicție cu f injectivă. Deci, nu există funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care să îndeplinească condiția dată.</p>	3p 2p

2.	<p>a) $f'(x) = \arctg x - \frac{x}{1+x^2}$ și $f''(x) = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$.</p> <p>$f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'$ crescătoare pe \mathbb{R}.</p> <p>$f'(x) \leq f'(0), \forall x \in (-\infty; 0] \Rightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty; 0] \Rightarrow f$ descrescătoare pe $(-\infty; 0]$.</p> <p>$f'(x) \geq f'(0), \forall x \in [0; +\infty) \Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in [0; +\infty) \Rightarrow f$ crescătoare pe $[0; +\infty)$</p>	3p
	<p>b) f strict crescătoare pe $\left[\frac{n-1}{n}; 1\right] \Rightarrow$</p> $f\left(\frac{n-1}{n}\right) < f(1) \Rightarrow \frac{n-1}{n} \arctg \frac{n-1}{n} - \ln\left(1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right) < \frac{\pi}{4} - \ln 2$ <p>Obținem $\arctg \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n-1} \ln\left(e^{\frac{\pi}{4} \frac{2n^2-2n+1}{2n^2}}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$.</p>	3p 2p
	<p>c) $f\left(\frac{n-1}{n}\right) \leq f(x), \forall x \in \left[\frac{n-1}{n}; 1\right] \Rightarrow f^n\left(\frac{n-1}{n}\right) \leq f^n(x), \forall x \in \left[\frac{n-1}{n}; 1\right]$</p> $\Rightarrow \int_{\frac{n-1}{n}}^1 f^n\left(\frac{n-1}{n}\right) dx \leq \int_{\frac{n-1}{n}}^1 f^n(x) dx \Rightarrow \frac{1}{n} f^n\left(\frac{n-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{n-1}{n}}^1 f^n(x) dx$ <p>Dar $\int_{\frac{n-1}{n}}^1 f^n(x) dx \leq \int_0^1 f^n(x) dx \leq \int_0^1 f^n(1) dx = f^n(1)$.</p> <p>Deducem că $\frac{1}{n} f^n\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \int_0^1 f^n(x) dx \leq f^n(1), \forall n \in \mathbb{N}^*$.</p> <p>Obținem $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \sqrt[n]{\int_0^1 f^n(x) dx} \leq f(1)$.</p> <p>Dar $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ și din continuitatea lui f în punctul 1 avem $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = f(1)$.</p> <p>Deci, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_0^1 f^n(x) dx} = f(1) = \frac{\pi}{4} - \ln 2$.</p>	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea
(30 de puncte)

<p><i>Itemul de completare</i> elaborat :</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat 	1p 1p 1p 1p 1p 1p
<p><i>Itemul de tip pereche</i> elaborat :</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat 	1p 1p 1p 1p 1p 1p
<p><i>Itemul de tip alegere multiplă</i> elaborat :</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat 	1p 1p 1p 1p 1p 1p
<p><i>Itemul de tip întrebare structurată</i> elaborat :</p>	

- menționarea competenței specifice evaluate	1p
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat	1p
- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item	1p
- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item	1p
- respectarea formatului itemului	1p
- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p
<i>Itemul de tip rezolvare de probleme elaborat :</i>	
- menționarea competenței specifice evaluate	1p
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat	1p
- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item	1p
- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item	1p
- respectarea formatului itemului	1p
- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE
MATEMATICĂ

Model 2

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

-
1. Se consideră ecuația cu coeficienți complecși $x^2 - (4 - 2i)x + 3 - 6i = 0$.
- 5p a) Rezolvați ecuația în mulțimea numerelor complexe.
- 5p b) Dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației, calculați $|x_1 + \overline{x_2}|$, unde $x_1 \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x - 3^x(4 - 2i) + 3 - 6i = 0$.
2. Fie triunghiul echilateral ABC cu $AB = 6\text{cm}$ și punctul M aparținând arcului mic BC al cercului circumscris triunghiului.
- 5p a) Determinați aria patrulaterului $ABMC$, dacă M este mijlocul arcului BC .
- 5p b) Determinați MC , dacă $BN = 2 \cdot MN$, unde N este punctul de intersecție al lui AM cu latura BC .
- 5p c) Arătați că $AM = BM + CM$, oricare ar fi poziția lui M pe arcul mic BC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

-
1. Se consideră polinoamele $f = 1 + 6X - 8X^3$, $g = 3X - 4X^3 \in \mathbb{R}[X]$
- 5p a) Demonstrați că polinomul f **nu** are rădăcini raționale.
- 5p b) Determinați câtul și restul împărțirii lui f la g .
- 5p c) Calculați $f\left(\sin \frac{\pi}{18}\right)$.
2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2 - 6x}{1 + x^2}$ și $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $F(x) = m \cdot \arctg x + n \cdot \ln(1 + x^2)$, $m, n \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Demonstrați că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(2, \infty)$.
- 5p b) Determinați numerele reale m și n știind că F este o primitivă a funcției f .
- 5p c) Pentru $m = 2, n = -3$, calculați $\int_0^1 f(x) \cdot F(x) dx$.

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VI-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

<p>Clasa a VI-a</p> <p>1.4. Recunoașterea fracțiilor echivalente, a fracțiilor ireductibile și a formelor de scriere a unui număr rațional</p> <ul style="list-style-type: none"> - Identificarea unui număr rațional în situații practice sau interdisciplinare (de exemplu: temperatura corpului, înălțimea unei persoane, prețul unui produs) - Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor, utilizând și noțiunile: opus și modul - Identificarea unor contexte practic-aplicative sau teoretice care folosesc numere raționale <p>2.4. Aplicarea regulilor de calcul cu numere raționale pentru rezolvarea ecuațiilor de tipul: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ ($a \neq 0$), $ax + b = c$, unde a, b și c sunt numere raționale</p> <ul style="list-style-type: none"> - Utilizarea regulilor specifice pentru efectuarea operațiilor cu numere raționale: adunare, scădere, înmulțire, împărțire (calcul ce implică maximum două operații) - Estimarea rezultatului unui calcul înainte de efectuarea lui (cu scopul dezvoltării abilităților de calcul mental în contexte practice, cotidiene, de exemplu: cumpărături, cantități necesare, cantități suficiente) - Validarea (prin probă) a soluției unei ecuații cu coeficienți numere raționale - Rezolvarea de ecuații utilizând regulile de calcul studiate <p>3.4. Utilizarea proprietăților operațiilor pentru compararea și efectuarea calculelor cu numere raționale</p> <ul style="list-style-type: none"> - Compararea numerelor raționale, inclusiv poziționarea numerelor pe axa numerelor - Ordonarea elementelor unei mulțimi finite de numere raționale - Utilizarea de proprietăți ale operațiilor cu numere raționale pentru optimizarea calculelor numerice - Utilizarea regulilor de calcul cu puteri (calcul numeric) - Determinarea unei necunoscute dintr-o ecuație (metoda mersului invers, metoda balanței, transformări ale relațiilor de egalitate) <p>4.4. Redactarea etapelor de rezolvare a unor probleme, folosind operații în mulțimea numerelor raționale</p> <ul style="list-style-type: none"> - Formularea unor răspunsuri logice în raport cu cerințe de calcul numeric (corelații intradisciplinare; de exemplu: apartenența rezultatului unui calcul la o mulțime, estimarea rezultatului) - Transpunerea unei probleme într-o ecuație care se rezolvă în mulțimea numerelor raționale - Redactarea demersului de rezolvare și validarea soluțiilor (prin probă) în cazul problemelor cu conținut practic <p>5.4. Determinarea unor metode eficiente în efectuarea calculelor cu numere raționale</p> <ul style="list-style-type: none"> - Analizarea unor situații practice în care se utilizează numere raționale - Analizarea și alegerea metodei optime de efectuare a calculului numeric prin utilizarea de proprietăți ale operațiilor studiate - Interpretarea răspunsurilor obținute prin rezolvarea de ecuații și identificarea mulțimii soluțiilor <p>6.4. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea operațiilor cu numere raționale</p> <ul style="list-style-type: none"> - Împărțirea unei cantități în părți direct sau invers proporționale cu mai multe numere date - Interpretarea matematică a unei proporționalități referitoare la segmente (de exemplu, interpretarea regulilor din șirul lui Fibonacci în construcții geometrice cu segmente, pătrate și dreptunghiuri) - Transpunerea, în limbaj matematic, a unei situații date, utilizând ecuații în contextul numerelor raționale - Formularea de probleme cu numere raționale pe baza unei scheme date sau a unui exercițiu dat

[...]

Domeniul de conținut	Conținuturi
Mulțimi. Numere	<p>4. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE</p> <ul style="list-style-type: none"> • Număr rațional; mulțimea numerelor raționale; reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor, opusul unui număr rațional; modulul; compararea și ordonarea numerelor raționale • Adunarea numerelor raționale; proprietăți; scăderea numerelor raționale • Înmulțirea numerelor raționale; proprietăți; împărțirea numerelor raționale; puterea cu exponent număr întreg a unui număr rațional nenul; reguli de calcul cu puteri • Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor • Ecuații de tipul: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$, ($a \neq 0$), $ax + b = c$, unde a, b și c sunt numere raționale; probleme care se rezolvă folosind ecuații de acest tip

Notă: Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Folosind informațiile din secvența de mai sus, în vederea evaluării formării/dezvoltării competențelor specifice precizate, elaborați o probă de evaluare la finalul unității de învățare „**Mulțimea numerelor raționale**”, care să cuprindă cinci itemi: *un item de completare, un item de tip pereche, un item de tip alegere multiplă, un item de tip întrebare structurată și un item de tip rezolvare de probleme.*

Pentru fiecare item propus:

- menționați competența specifică evaluată
- menționați activitatea de învățare în cadrul căreia ați utiliza acest item
- precizați un avantaj al utilizării acestui tip de item
- precizați un dezavantaj al utilizării acestui tip de item
- respectați formatul tipului de item
- respectați corectitudinea științifică, inclusiv a răspunsului așteptat

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE

MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	a) $\Delta = 8i = (2 + 2i)^2$ $x_1 = 3, x_2 = 1 - 2i$	3p
	b) $x_1 = 3 \in \mathbb{R}, x_2 = 1 - 2i \Rightarrow \overline{x_2} = 1 + 2i$ $ x_1 + \overline{x_2} = 4 + 2i = 2\sqrt{5}$	3p 2p
	c) $3^x = t > 0 \Rightarrow t^2 - (4 - 2i)t + 3 - 6i = 0$ $t = 3 \in \mathbb{R} \Rightarrow x = 1$	3p 2p
2.	a) Dacă M este mijlocul arcului mic BC , atunci AM este diametru și $AM = 2R = \frac{2AB\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$ cm. $A_{ABMC} = \frac{AM \cdot BC}{2} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 6}{2} = 12\sqrt{3}$ cm ² .	3p 2p
	b) Din $ABMC$ patrulater inscriptibil rezultă $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle BCM$ și cum $\sphericalangle ANB \equiv \sphericalangle CNM$, obținem $\Delta ANB \sim \Delta CNM$ și $\frac{AB}{CM} = \frac{BN}{MN}$. Dacă $BN = 2 \cdot MN$, obținem $AB = 2 \cdot CM$ și apoi $CM = 3$ cm.	3p 2p
	c) Fie $P \in AM$ astfel încât $\sphericalangle PBM = 60^\circ$. Cum și $\sphericalangle BMP = 60^\circ$, obținem ΔBMP echilateral $\Rightarrow BM = MP$. $\Delta ABP \equiv \Delta CBM$ (U.L.U.) $\Rightarrow AP = CM$. Obținem $AM = AP + MP = CM + BM$.	1p 2p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	a) Presupunem că f are rădăcini raționale. Dacă $\alpha \in \mathbb{Q}$ ar fi rădăcină, $\alpha \in \left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8} \right\}$ $f(\alpha) \neq 0, \forall \alpha \in \left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8} \right\}$	3p 2p
	b) Efectuând împărțirea se obține câtul 2 Și restul 1	3p 2p
	c) $f\left(\sin \frac{\pi}{18}\right) = 2g\left(\sin \frac{\pi}{18}\right) + 1 = 2\left(3\sin \frac{\pi}{18} - 4\sin^3 \frac{\pi}{18}\right) + 1$ $2\sin \frac{\pi}{6} + 1 = 2$	3p 2p
2.	a) $f'(x) = \frac{2(3x^2 - 2x - 3)}{(1 + x^2)^2}$ $x \in (2, \infty) \Rightarrow f'(x) > 0$ deci funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(2, \infty)$	3p 2p
	b) F este derivabilă pe \mathbb{R} și $F'(x) = \frac{m + 2nx}{1 + x^2}$	3p

	$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow m = 2, n = -3$	2p
c)	$\int_0^1 f(x) \cdot F(x) dx = \int_0^1 F'(x) \cdot F(x) dx = \frac{1}{2} F^2(x) \Big _0^1$	3p
	$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 3 \ln 2 \right)^2$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

<p><i>Itemul de completare</i> elaborat :</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p><i>Itemul de tip pereche</i> elaborat :</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p><i>Itemul de tip alegere multiplă</i> elaborat :</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p><i>Itemul de tip întrebare structurată</i> elaborat :</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p><i>Itemul de tip rezolvare de probleme</i> elaborat :</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE
MATEMATICĂ

Model 3

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1. Se consideră ecuația $mx^2 - 2x - m - 1 = 0, m \in \mathbb{R}^*$.

- 5p a) Demonstrați că ecuația are soluții reale și distincte, pentru orice număr real nenul m .
- 5p b) Determinați valorile întregi, nenule ale lui m astfel încât soluțiile ecuației să fie întregi.
- 5p c) Determinați valorile reale, nenule ale lui m pentru care ecuația $m \sin^2 x - 2 \sin x - m - 1 = 0$ are soluții reale.
2. Se consideră z_1, z_2, z_3 numere complexe de modul 1 cu proprietatea $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ și mulțimea $A = \{(a, b, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \sin a + \sin b + \sin c = 0, \cos a + \cos b + \cos c = 0\}$.
- 5p a) Arătați că $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3 = z_1 z_2 z_3$.
- 5p b) Calculați $\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c$, unde $(a, b, c) \in A$.
- 5p c) Determinați $(a, b, c) \in A$ astfel încât $\sin 3a + \sin 3b + \sin 3c \neq 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + y - 5$.

- 5p a) Demonstrați că mulțimea $(-\infty, 5]$ este parte stabilă în raport cu legea de compoziție „*”.
- 5p b) Determinați numărul soluțiilor ecuației $\log_5^2 x * a^2 = 2a \log_5 x - 5$ în mulțimea $(0, 5]$, unde $a \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Determinați perechile de numere întregi (m, n) pentru care $m * n = mn$.

2. Se consideră funcția $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$ și integrala $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^{2n}(x) dx$.

- 5p c) Calculați $f'(x) - f^2(x)$.
- 5p b) Arătați că $I_n = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}$, pentru orice număr natural, nenul n .
- 5p c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VI-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

<p>Clasa a VI-a</p> <p>1.5. Recunoașterea unor figuri geometrice plane (drepte, unghiuri, cercuri, arce de cerc) în configurații date</p> <ul style="list-style-type: none"> - Identificarea unor drepte sau unghiuri într-o configurație geometrică dată, din realitatea înconjurătoare - Identificarea unor cercuri și arce de cerc într-o configurație geometrică dată, din realitatea înconjurătoare - Identificarea unor relații între elemente geometrice date (apartenență, incluziune, egalitate, concurență, paralelism, perpendicularitate, simetrie) <p>2.5. Recunoașterea coliniarității unor puncte, a faptului că două unghiuri sunt opuse la vârf, adiacente, complementare sau suplementare și a paralelismului sau perpendicularității a două drepte</p> <ul style="list-style-type: none"> - Prelucrarea cantitativă a unor informații privind distanțe, lungimi de segmente sau măsuri de unghiuri/arce în vederea stabilirii coliniarității unor puncte, inclusiv în contextul cercului (de exemplu: punctele diametral opuse, centrul cercului) - Verificarea faptului că două unghiuri sunt suplementare, complementare sau congruente - Aplicarea, într-o configurație dată, a proprietății unghiurilor opuse la vârf și a unghiurilor în jurul unui punct pentru determinarea unor măsuri de unghiuri <p>3.5. Utilizarea unor proprietăți referitoare la distanțe, drepte, unghiuri, cerc pentru realizarea unor construcții geometrice</p> <ul style="list-style-type: none"> - Utilizarea instrumentelor geometrice (raportor, riglă, compas) pentru realizarea unor figuri geometrice - Construcția bisectoarei unui unghi folosind raportorul și rigla, respectiv compasul și rigla - Construcția dreptelor paralele, a dreptelor perpendiculare, a mediatoarei unui segment folosind instrumentele geometrice - Construcția simetricii unei figuri față de o dreaptă dată - Determinarea unor lungimi de segmente utilizând informații cuprinse în reprezentările geometrice - Determinarea unor măsuri de unghiuri/arce de cerc utilizând informații cuprinse în reprezentările geometrice <p>4.5. Exprimarea, prin reprezentări geometrice sau în limbaj specific matematic, a noțiunilor legate de dreaptă, unghi și cerc</p> <ul style="list-style-type: none"> - Descrierea în limbaj matematic a unor configurații geometrice date care conțin drepte, unghiuri, cercuri - Transpunerea unor informații date (matematic sau în context practic) în configurații geometrice care conțin drepte, unghiuri, cercuri - Justificarea paralelismului a două drepte utilizând perechi de unghiuri formate de două drepte cu o secantă <p>5.5. Analizarea seturilor de date numerice sau a reprezentărilor geometrice în vederea optimizării calculelor cu lungimi de segmente, distanțe, măsuri de unghiuri și de arce de cerc</p> <ul style="list-style-type: none"> - Stabilirea numărului minim/maxim de drepte determinate de un număr dat de puncte (fără generalizare) - Analizarea unei configurații geometrice pentru verificarea unor proprietăți referitoare la bisectoare (de exemplu: bisectoarele unghiurilor opuse la vârf, bisectoarele unghiurilor adiacente suplementare) - Analizarea unei configurații geometrice pentru verificarea unor proprietăți referitoare la lungimi (de exemplu: ordonarea unor puncte pe dreaptă utilizând lungimi de segmente date, lungimea coardei cel mult egală cu lungimea diametrului) - Analizarea unei configurații geometrice pentru verificarea unor proprietăți referitoare la simetria față de un punct, simetria față de o dreaptă <p>6.5. Interpretarea informațiilor conținute în reprezentări geometrice pentru determinarea unor lungimi de segmente, distanțe și a unor măsuri de unghiuri/arce de cerc</p> <ul style="list-style-type: none"> - Descrierea unei situații-problemă, cu transpunerea acesteia din limbaj curent în limbaj simbolic și figurativ - Estimarea lungimii unui segment, a unei distanțe, a măsurii unui unghi sau a unui arc utilizând diverse date, reguli, relații - Validarea rezultatului unui calcul/corectitudinii unei reprezentări geometrice, folosind modalități diferite de abordare: estimări, măsurători, comparații
--

[...]

Domeniul de conținut	Conținuturi
Geometrie	<p>5. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE</p> <ul style="list-style-type: none"> • Unghiuri opuse la vârf, congruența lor; unghiuri formate în jurul unui punct, suma măsurilor lor; unghiuri suplementare, unghiuri complementare • Unghiuri adiacente; bisectoarea unui unghi, construcția bisectoarei unui unghi • Drepte paralele (definiție, notație, construcție intuitivă prin translație); axioma paralelelor; criterii de paralelism (unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă); aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice • Drepte perpendiculare în plan (definiție, notație, construcție); oblice; aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice; distanța de la un punct la o dreaptă; mediatoarea unui segment; construcția mediatoarei unui segment; simetria față de o dreaptă • Cerc (definiție, construcție); elemente în cerc: centru, rază, coardă, diametru, arc de cerc; unghi la centru; măsuri • Pozițiile unei drepte față de un cerc; pozițiile relative a două cercuri

Notă: Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Folosind informațiile din secvența de mai sus, în vederea evaluării formării/dezvoltării competențelor specifice precizate, elaborați o probă de evaluare la finalul unității de învățare „**Noțiuni geometrice fundamentale**”, care să cuprindă cinci itemi: *un item de completare, un item de tip pereche, un item de tip alegere multiplă, un item de tip întrebare structurată și un item de tip rezolvare de probleme.*

Pentru fiecare item propus:

- menționați competența specifică evaluată
- menționați activitatea de învățare în cadrul căreia ați utiliza acest item
- precizați un avantaj al utilizării acestui tip de item
- precizați un dezavantaj al utilizării acestui tip de item
- respectați formatul tipului de item
- respectați corectitudinea științifică, inclusiv a răspunsului așteptat

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE
MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	a) $\Delta = 4(m^2 + m + 1)$ $\Delta > 0, \forall m \in \mathbb{R}^* \Rightarrow$ ecuația are soluții reale și distincte, pentru orice număr real nenul m	3p 2p
	b) Ecuația are soluțiile numere întregi dacă $x_1 + x_2 = \frac{2}{m} \in \mathbb{Z}, x_1 \cdot x_2 = -\frac{m+1}{m} \in \mathbb{Z}$ $m = 1$	3p 2p
	c) Notăm $\sin x = t \in [-1, 1]$. Ecuația $mt^2 - 2t - m - 1 = 0, m \in \mathbb{R}^*$ are soluții reale dacă $m \cdot f(1) \geq 0, m \cdot f(-1) \geq 0, -1 \leq \frac{1}{m} \leq 1$ sau $m \cdot f(1) \leq 0, m \cdot f(-1) \geq 0, \frac{1}{m} \geq -1$ sau $m \cdot f(1) \geq 0, m \cdot f(-1) \leq 0, \frac{1}{m} \leq 1$ $m \in (0, \infty)$	3p 2p
	2. a) $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ și $ z_i = 1, i = 1, 2, 3 \Rightarrow z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0$, deci z_1, z_2, z_3 sunt soluțiile ecuației $x^3 - z_1 z_2 z_3 = 0$ Obținem că $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3 = z_1 z_2 z_3$	3p 2p
b) Considerăm $z_1 = \cos a + i \sin a, z_2 = \cos b + i \sin b, z_3 = \cos c + i \sin c, (a, b, c) \in A$ Cum $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0 = (\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c) + i(\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c) = 0$ $\Rightarrow \sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 0$	2p 3p	
c) $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right) \in A$ $\sin 3\frac{\pi}{6} + \sin 3\frac{5\pi}{6} + \sin 3\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3 \neq 0$	3p 2p	

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	a) $x \leq 5, y \leq 5 \Rightarrow x + y \leq 10$ $x + y - 5 \leq 5 \Leftrightarrow x * y \in (-\infty, 5]$	2p 3p
	b) $(\log_5 x - a)^2 = 0 \Leftrightarrow \log_5 x = a \Rightarrow x = 5^a$ Dacă $a \leq 1$ ecuația are o soluție, iar dacă $a > 1$ ecuația nu are soluții în mulțimea $(0, 5]$	3p 2p
	c) $m + n - 5 = mn \Leftrightarrow (1 - n)(m - 1) = 4, m, n \in \mathbb{Z}$ Perechile de numere întregi $(5, 0), (2, -3), (3, -1), (-3, 2), (0, 5), (-1, 3)$	3p 2p
	2. a) $f'(x) = 1 + tg^2 x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $f'(x) - f^2(x) = 1$	3p 2p

	<p>b) $I_n + I_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n-2} x (\operatorname{tg}^2 x + 1) dx =$</p> $= \frac{\operatorname{tg}^{2n-1} x}{2n-1} \Big _0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2n-1}$	<p>3p</p> <p>2p</p>
	<p>c) Cum șirul I_n este descrescător, din b) deducem că $0 \leq 2I_n \leq \frac{1}{2n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$</p> <p>$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

<p><i>Itemul de completare</i> elaborat :</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p><i>Itemul de tip pereche</i> elaborat :</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p><i>Itemul de tip alegere multiplă</i> elaborat :</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p><i>Itemul de tip întrebare structurată</i> elaborat :</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p><i>Itemul de tip rezolvare de probleme</i> elaborat :</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE
MATEMATICĂ

Model 4

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : R \rightarrow R, f(x) = \left(2\sin^2 \frac{a}{2} - 1\right)x^2 + (\sin a + \cos a)x + 1 - \sin a$, unde $a \in R$ și $\cos a \neq 0$.
- 5p a) Pentru $a = \frac{2\pi}{3}$ determinați punctele de intersecție ale graficului funcției cu axele de coordonate.
- 5p b) Dacă x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației $f(x) = 0$, determinați valorile lui a astfel încât $x_1, 1, x_2$ să fie termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p c) Determinați valorile lui a astfel încât maximumul funcției să fie egal cu 1.
2. Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$ în care M este mijlocul muchiei BC , O centrul feței $CDD' C'$, iar $AO = 6\sqrt{6}$ cm.
- 5p a) Determinați lungimea muchiei cubului.
- 5p b) Aflați raportul dintre volumul tetraedrului $OO'AM$, unde $O' = pr_{(ABC)}O$ și volumul cubului.
- 5p c) Determinați perimetrul patrulaterului $AMNP$, unde $\{N\} = (AMO) \cap CC'$ și $\{P\} = (AMO) \cap DD'$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Pe mulțimea numerelor reale, se consideră legea de compoziție $x \circ y = (x^{2k-1} + y^{2k-1})^{\frac{1}{2k-1}}$, $k \in N^*$
- 5p a) Verificați dacă legea de compoziție este asociativă.
- 5p b) Verificați dacă toate elementele sunt simetrizabile.
- 5p c) Arătați că funcția $f : R \rightarrow R, f(x) = x^{\frac{1}{2k-1}}$ este un morfism între grupurile $(R, +)$ și (R, \circ) .
2. Se consideră funcția $f : R \rightarrow R, f(x) = \arctg(x+2) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4x + 5)$
- 5p d) Calculați derivata funcției.
- 5p b) Studiați monotonia funcției

5p

$$c) \text{ Demonstrați că: } \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx \leq \frac{\pi}{2} - \ln 2$$

SUBIECTUL al III-lea**(30 de puncte)**

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a V-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

Clasa a V-a
<p>1.3. Identificarea noțiunilor geometrice elementare și a unităților de măsură în diferite contexte</p> <ul style="list-style-type: none"> - Observarea unor figuri geometrice pe modele fizice/desene - Descrierea și identificarea unor elemente ale figurilor și ale corpurilor geometrice - Identificarea unor segmente congruente sau unghiuri congruente în configurații cu axe de simetrie - Alegerea unității de măsură pentru estimarea lungimilor/distanțelor, ariilor și volumelor în diferite situații practice
<p>2.3. Utilizarea instrumentelor geometrice pentru a măsura sau pentru a construi configurații geometrice</p> <ul style="list-style-type: none"> - Construcția unor figuri geometrice cu dimensiuni date - Măsurarea unor lungimi pe modele sau obiecte din realitatea înconjurătoare (utilizând instrumente de măsură adecvate) - Aplicarea unor metode practice pentru măsurarea perimetrelor pe modele sau obiecte din realitatea înconjurătoare - Construcția unor segmente congruente și a unor unghiuri congruente - Reprezentarea prin desen a unor configurații geometrice (drepte paralele, drepte perpendiculare, unghiuri de măsură dată etc.) - Măsurarea cu raportorul a unui unghi dat
<p>3.3. Determinarea perimetrelor, a ariilor (pătrat, dreptunghi) și a volumelor (cub, paralelipiped dreptunghic) și exprimarea acestora în unități de măsură corespunzătoare</p> <ul style="list-style-type: none"> - Transformări ale unităților de măsură standard folosind fracții zecimale - Calcularea perimetrului unei figuri geometrice, evidențiind intuitiv perimetrul - Operații cu măsuri de unghiuri (limitate numai la grade și minute sexagesimale) - Determinarea volumului unui cub, al unui paralelipiped dreptunghic, utilizând rețeaua de cuburi cu lungimea muchiei egală cu 1 și deducerea formulei de calcul - Aplicarea formulei pentru calculul volumului unui cub și a unui paralelipiped dreptunghic
<p>4.3. Transpunerea în limbaj specific a unor probleme practice referitoare la perimetre, arii, volume, utilizând transformarea convenabilă a unităților de măsură</p> <ul style="list-style-type: none"> - Compararea unor distanțe/lungimi, perimetre, arii și volume exprimate prin unități de măsură diferite - Descrierea unor reprezentări geometrice în situații practice/aplicative (de exemplu, realizarea planului clasei, al curții școlii prin metoda proiectului) - Descrierea metodelor utilizate pentru verificarea coliniarității unor puncte date (de exemplu, cu măsuri de unghiuri, cu lungimi de segmente)
<p>5.3. Interpretarea prin recunoașterea elementelor, a măsurilor lor și a relațiilor dintre ele, a unei configurații geometrice dintr-o problemă dată</p> <ul style="list-style-type: none"> - Estimarea sau determinarea ariilor unor suprafețe în contexte reale, utilizând caroiaje/pavaje - Estimarea ariei unei piese de pavaj atunci când cunoaștem aria suprafeței și numărul de piese - Estimarea mărimii unor caracteristici (lungime, arie, volum) ale unor obiecte din mediul înconjurător - Determinarea prin pliere a axelor de simetrie pentru pătrat, dreptunghi - Estimarea capacității unui vas prin raportare la capacitatea altui vas (activitate practică sau lecții demonstrative utilizând calculatorul)

6.3. Analizarea unor probleme practice care includ elemente de geometrie studiate, cu referire la unități de măsură și la interpretarea rezultatelor

- Alegerea unui etalon adecvat pentru activități practice referitoare la lungimi/arii/volume/capacități
- Stabilirea unor legături, în contexte reale, între diferite tipuri de măsurători (de exemplu: determinarea indicelui de masă corporală, determinarea cantității de apă care se acumulează într-un vas în timp dat)
- Aplicarea în situații practice a elementelor de geometrie, pentru a obține un răspuns la o problemă deschisă (de exemplu, utilizarea unor metode personale pentru transpunerea unui model geometric dat pe hârtie la suprafețe mari: rond de flori, mozaic, mandala) sau pentru a realiza estimări (de exemplu, determinarea numărului de portocale care încap într-o cutie cubică imaginară cu latura de 100 metri)
- Modelarea unei situații date, referitoare la segmente, figuri congruente, mijlocul unui segment și simetricul unui punct față de un punct, prin transpunerea acestora din contextul dat în limbaj specific matematicii

[...]

Domeniul de conținut	Conținuturi
Geometrie	<p>3. ELEMENTE DE GEOMETRIE ȘI UNITĂȚI DE MĂSURĂ</p> <ul style="list-style-type: none">● Punct, dreaptă, plan, semiplan, semidreaptă, segment (descriere, reprezentare, notații¹)● Pozițiile relative ale unui punct față de o dreaptă; puncte coliniare; „prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una”; pozițiile relative a două drepte: drepte concurente, drepte paralele● Distanța dintre două puncte; lungimea unui segment; segmente congruente (construcție); mijlocul unui segment; simetricul unui punct față de un punct● Unghi: definiție, notații, elemente; interiorul unui unghi, exteriorul unui unghi● Măsura unui unghi², unghiuri congruente (măsurarea și construcția cu raportorul); clasificări de unghiuri: unghi drept, unghi ascuțit, unghi obtuz; unghi nul, unghi alungit● Calcule cu măsuri de unghiuri exprimate în grade și minute sexagesimale● Figuri congruente (prin suprapunere); axa de simetrie (prin suprapunere)● Unități de măsură pentru lungime, aplicație: perimetre; unități de măsură pentru arie, aplicații: aria pătratului/dreptunghiului; unități de măsură pentru volum, aplicații: volumul cubului și al paralelipipedului dreptunghic; transformări ale unităților de măsură <p>¹ Notația AB reprezintă dreapta AB, segmentul AB, lungimea segmentului AB sau distanța de la punctul A la punctul B, în funcție de context.</p> <p>² Notația $\sphericalangle AOB$ reprezintă atât unghiul AOB, cât și măsura unghiului AOB, în funcție de context.</p>

Notă: Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Folosind informațiile din secvența de mai sus, în vederea evaluării formării/dezvoltării competențelor specifice precizate, elaborați o probă de evaluare la finalul unității de învățare „**Elemente de geometrie și unități de măsură**”, care să cuprindă cinci itemi: un item de completare, un item de tip pereche, un item de tip alegere multiplă, un item de tip întrebare structurată și un item de tip rezolvare de probleme.

Pentru fiecare item propus:

- menționați competența specifică evaluată
- menționați activitatea de învățare în cadrul căreia ați utiliza acest item
- precizați un avantaj al utilizării acestui tip de item
- precizați un dezavantaj al utilizării acestui tip de item
- respectați formatul tipului de item
- respectați corectitudinea științifică, inclusiv a răspunsului așteptat

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE
MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	<p>a) $a = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)x + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$</p> <p>$G_f \cap O_y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A(0, f(0)) \Rightarrow A\left(0, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$</p> <p>$G_f \cap O_x \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)x + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$</p> <p>$\Delta = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \Delta = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$</p> <p>$\Delta < 0 \Rightarrow G_f \cap O_x = \emptyset$</p>	3p
	<p>b) $f(x) = (-\cos a) \cdot x^2 + (\sin a + \cos a) \cdot x + 1 - \sin a$</p> <p>$x_1, 1, x_2$ sunt în progresie geometrică $\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow \frac{1 - \sin a}{-\cos a} = 1$</p> <p>$\sin a - \cos a = 1$</p> <p>$(1 + \cos a)^2 + \cos^2 a = 1$</p> <p>$\cos a = 0$ nu convine</p> <p>$\cos a = -1 \Rightarrow a \in \{\pm\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$</p>	3p
	<p>c) funcția admite maxim dacă $-\cos a < 0 \Rightarrow a \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right); k \in \mathbb{Z}$</p> <p>$\max f(x) = \frac{-\Delta}{4a}; \quad \frac{(\sin a - \cos a)^2 + 4\cos a}{4\cos a} = 1$</p> <p>$a \in \left\{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$</p>	1p 2p 2p
2.	<p>a) Dacă $O' = pr_{(ABC)}O$ și $AB = 2a$, atunci $OO' = a$, $AO' = a\sqrt{5}$.</p> <p>Din $\Delta AOO'$ avem $AO = a\sqrt{6}$ și, folosind ipoteza, obținem $a = 6$ cm și $AB = 12$ cm.</p>	3p 2p
	<p>b) $A_{\Delta AMO'} = A_{ABCD} - (A_{\Delta ADO'} + A_{\Delta ABM} + A_{\Delta CMO'}) = 144 - (36 + 36 + 18) = 54 \text{ cm}^2$.</p> <p>$V_{OO'AM} = \frac{A_{\Delta AMO'} \cdot OO'}{3} = \frac{54 \cdot 6}{3} = 108 \text{ cm}^3 \Rightarrow \frac{V_{OO'AM}}{V_{cub}} = \frac{108}{12^3} = \frac{1}{16}$.</p>	3p 2p
	<p>c) Dacă $\{R\} = AM \cap DC$, obținem că $\{N\} = OR \cap CC'$ și $\{P\} = OR \cap DD'$.</p> <p>$\Delta AMB \cong \Delta RMC \Rightarrow RC = 12$ cm.</p> <p>$\Delta RCN \sim \Delta RO'O \Rightarrow \frac{RC}{RO'} = \frac{NC}{OO'} \Rightarrow NC = 4$ cm. Obținem apoi $MN = 2\sqrt{13}$ cm.</p>	1p 2p

	<p>MN este linie mijlocie în ΔRAP și obținem $AP = 4\sqrt{13}$ cm.</p> <p>Din ΔABM obținem $AM = 6\sqrt{5}$.</p> <p>Din trapezul dreptunghic $CDPN$ obținem $NP = 4\sqrt{10}$ cm.</p> <p>Astfel, $P_{AMNP} = 6\sqrt{13} + 4\sqrt{10} + 6\sqrt{5}$.</p>	2p
--	--	-----------

SUBIECTUL al II-lea
(30 de puncte)

1.	<p>a) verificăm dacă $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$</p> $(x \circ y) \circ z = \left[(x^{2k-1} + y^{2k-1})^{\frac{1}{2k-1}} \right] \circ z = \left\{ \left[(x^{2k-1} + y^{2k-1})^{\frac{1}{2k-1}} \right]^{2k-1} + z^{2k-1} \right\}^{\frac{1}{2k-1}} =$ $(x^{2k-1} + y^{2k-1} + z^{2k-1})^{\frac{1}{2k-1}}$ $x \circ (y \circ z) = x \circ \left[(y^{2k-1} + z^{2k-1})^{\frac{1}{2k-1}} \right] = (x^{2k-1} + y^{2k-1} + z^{2k-1})^{\frac{1}{2k-1}}$ <p>\Rightarrow legea de compoziție este asociativă</p>	2p
	<p>b) Avem $x \circ y = (x^{2k-1} + y^{2k-1})^{\frac{1}{2k-1}} = (y^{2k-1} + x^{2k-1})^{\frac{1}{2k-1}} = y \circ x, \forall x, y \in \mathbb{R}$</p> <p>$e \in R$ este element neutru $\Leftrightarrow e \circ x = x \circ e = x, \forall x \in \mathbb{R}$</p> $(e^{2k-1} + x^{2k-1})^{\frac{1}{2k-1}} = x \Rightarrow e^{2k-1} + x^{2k-1} = x^{2k-1} \Rightarrow e = 0$ <p>Notăm x' simetricul lui x $x \circ x' = x' \circ x = 0 \Rightarrow [x^{2k-1} + (x')^{2k-1}]^{\frac{1}{2k-1}} = 0$</p> $(x')^{2k-1} = -x^{2k-1} \in R \Rightarrow$ toate elementele sunt simetrizabile	3p
	<p>c) f morfism $\Leftrightarrow f(x+y) = f(x) \circ f(y)$</p> $f(x+y) = (x+y)^{\frac{1}{2k-1}}$ $f(x) \circ f(y) = \left(x^{\frac{1}{2k-1}} \right) \circ \left(y^{\frac{1}{2k-1}} \right) = \left(\left(x^{\frac{1}{2k-1}} \right)^{2k-1} + \left(y^{\frac{1}{2k-1}} \right)^{2k-1} \right)^{\frac{1}{2k-1}} = (x+y)^{\frac{1}{2k-1}}$ <p>$\Rightarrow f$ morfism.</p>	3p
2.	<p>a) $f'(x) = \frac{(x+2)'}{(x+2)^2+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5} = \frac{1}{(x+2)^2+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+4}{x^2+4x+5} =$</p> $\frac{1}{x^2+4x+5} - \frac{x+2}{x^2+4x+5} = \frac{-x-1}{x^2+4x+5}$	3p
	<p>b) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$</p> <p>pt. $x \in (-\infty, -1], f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty, -1]$</p> <p>pt. $x \in [-1, \infty), f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-1, \infty)$</p>	2p
	<p>c) $f'(-1) = 0, x = -1$ este punct de maxim $\Rightarrow f(x) \leq f(-1), \forall x \in R$</p>	3p

	$f(x) \leq \arctg 1 - \frac{1}{2} \ln 2 \Rightarrow \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx \leq \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) \Rightarrow \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx \leq \frac{\pi}{2} - \ln 2$	2p
--	--	-----------

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

<p><i>Itemul de completare</i> elaborat :</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p><i>Itemul de tip pereche</i> elaborat :</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p><i>Itemul de tip alegere multiplă</i> elaborat :</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p><i>Itemul de tip întrebare structurată</i> elaborat :</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p><i>Itemul de tip rezolvare de probleme</i> elaborat :</p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>